

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего профессионального образования**  
**«Донской государственный технический университет»**

Утверждено на заседании кафедры  
технической механики

6 марта 2021 г.

**КУРС ЛЕКЦИЙ**  
**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**Динамика и устойчивость конструкций**

для самостоятельной работы для обучающихся заочной формы обучения по  
программам подготовки: 08.03.01 Все программы ПГС, ЭУН, АД

Авторы:

д.т.н., проф. Панасюк Л.Н.,  
К.т.н., доц., Кравченко Г.М.,  
К.т.н., доц., Труфанова Е.В.  
Ст. преподав. Тюрина В.С.

Ростов-на-Дону

2021

## Оглавление

Основы динамики стержневых систем .....	3
Основные понятия .....	3
Определение числа степеней свободы .....	4
Собственные колебания систем с одной степенью свободы без учёта сил сопротивления внешней среды .....	5
Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы .....	9
Собственные колебания системы с конечным числом степеней свободы .....	12
Вынужденные колебания систем с $n$ степенями свободы .....	15
Порядок расчёта: .....	17
1. Определение числа степеней свободы: каждая из масс $m_1$ и $m_2$ может перемещаться только в вертикальном направлении, следовательно, число степеней свободы рассчитываемой рамы равно 2. ....	17
2. Построение единичных и грузовой эпюр. ....	17
3. Определение собственных частот. ....	20
Определение инерционных сил .....	21
Устойчивость стержневых систем .....	26
Основные понятия .....	26
Статический метод. ....	27
Определение усилий в сжато-изогнутых стержнях при смещении их опорных закреплений .....	28
Определение изгибающих моментов и поперечных сил в опорных сечениях .....	30
Расчёт статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений .....	31

## Основы динамики стержневых систем

### Основные понятия

В предыдущих разделах был рассмотрен расчёт стержневых систем при действии на них статических нагрузок. Однако в практике создания и эксплуатации транспортных сооружений большинство нагрузок являются такими, которые во времени изменяют и свою величину, и направление действия.

Нагрузки, которые являются функциями от времени, называются динамическими. Динамические нагрузки при действии на элементы конструкции вызывают их колебания. Поэтому в колеблющихся элементах конструкции появляются инерционные силы, вызывающие возникновение в поперечных сечениях колеблющихся элементов сооружений дополнительные внутренние усилия.

Автопоезда, движущиеся по дорогам, мостам, передают нагрузки, изменяющиеся во времени. Транспортные конструкции в процессе действия на них динамических нагрузок испытывают колебательный процесс, вызывающий появление в конструкциях значительных инерционных сил. Особенно опасны колебания при резонансе, когда напряжения и деформации могут достигать бесконечности, т.е. наступает разрушение конструкции. Инженер должен уметь применять меры, направленные на уменьшение эффекта динамических воздействий.

В практике расчётов всё многообразие динамических нагрузок условно подразделяют на пять видов:

1. Вибрационная нагрузка, изменяющаяся во времени по какому-либо закону – синуса, косинуса и др.). Как правило, вибрационные нагрузки создаются вращением неуравновешенных масс. Например, вращение коленчатого вала автомобиля.
2. Ударная нагрузка, время действия которой составляет десятые доли секунды. Характерным примером создания ударной нагрузки является работа копра при забивке свай.
3. Импульсная нагрузка, время действия которой составляет сотые доли секунды. Характерным примером импульсной нагрузки является удар железнодорожного колеса при движении поезда о стык рельс.
4. Подвижная нагрузка, к которой относят автомобили, железнодорожные поезда, поезда метрополитена.
5. Сейсмическая нагрузка, характерная хаотичным изменением во времени и своей величины, и направления.

В настоящем курсе рассматривается действие только вибрационной нагрузки.

### Определение числа степеней свободы

В динамике сооружений число степеней свободы равно числу независимых геометрических параметров, определяющих положение колеблющихся масс в любой момент времени. Из приведённого определения числа степеней свободы очевидно, что в динамике сооружений, в отличие от статики, появляется ещё одна координата – время.

Определение числа степеней свободы удобно проводить путём наложения связей. Минимальное число связей, устраняющих возможные перемещения масс, будет равно числу степеней свободы системы.

При определении числа степеней свободы можно вводить допущения, упрощающие их нахождение.

Рассмотрим пример определения числа степеней свободы для простой балки, несущей массу  $m$ . Число степеней свободы такой балки равно 1 (рис. 9.1), так как масса  $m$  может колебаться только в вертикальном направлении.

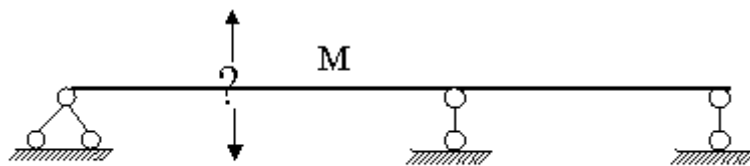


Рис. 9.1

Перемещением массы по горизонтали пренебрегаем. Пренебрегаем также вращением массы. Массу закрепляем одной вертикальной связью, устраняющей возможное вертикальное перемещение массы.

Если на балке расположено  $n$  колеблющихся масс (рис. 9.2), то число степеней свободы такой балки равно  $n$ .

Рассмотрим раму, на стойке которой прикреплена колеблющаяся масса  $m$  (рис. 9.3). Учитывая, что изгибная жёсткость  $EJ$  ригеля есть конечная величина, масса  $m$  может колебаться как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях. Число степеней свободы рассматриваемой системы равно 2.

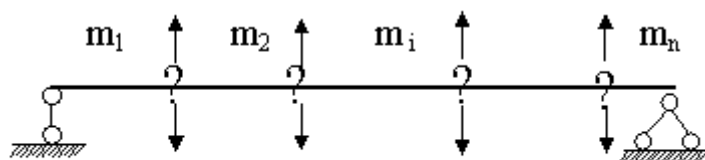


Рис. 9.2

Рассмотрим раму, на стойке которой прикреплена колеблющаяся масса  $m$  (рис. 9.3). Учитывая, что изгибная жёсткость  $EJ$  ригеля есть конечная величина, масса  $m$  может колебаться как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях. Число степеней свободы рассматриваемой системы равно 2.



Рис. 9.3

Из приведенного примера очевидно, что число степеней свободы и число колеблющихся масс не всегда могут совпадать.

Собственные колебания систем с одной степенью свободы без учёта сил сопротивления внешней среды

Рассмотрим невесомую балку, весом которой по сравнению с массой  $m$  пренебрегаем (рис. 9.4).

Рассмотрим положение массы  $m$  в момент времени  $t$ . Отклонение массы обозначим  $y(t)$ . В отклонённом положении на массу  $m$  действует сила инерции  $J$ , равная, как известно из курса физики, произведению массы на ускорение.

$$J(t) = -m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (9.1)$$

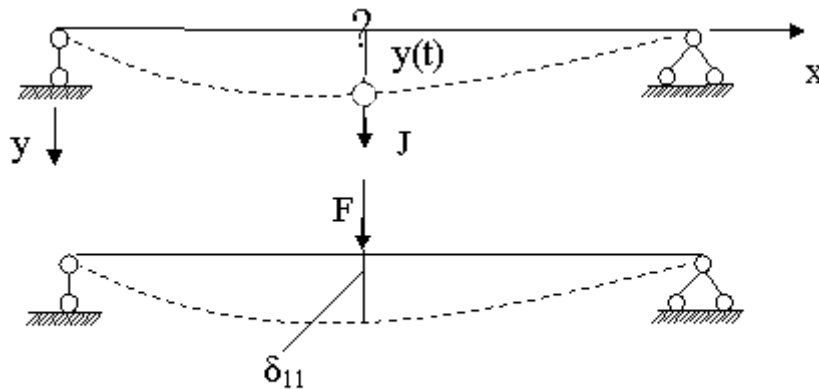


Рис. 9.4

Перемещение массы определяем через единичное перемещение в соответствии с выражением

$$y(t) = J(t) \cdot \delta_{11} \quad (9.2)$$

Перемещение  $\delta_{11}$  в (9.2) представляет собой перемещение, найденное от действия силы  $F=1$ , приложенной в точке прикрепления массы  $m$ .

С учетом (9.1) выражение (9.2) принимает вид

$$y(t) = -m \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \delta_{11} \quad (9.3)$$

Переносим все слагаемые в левую часть уравнения (9.3), получим дифференциальное однородное уравнение, описывающее собственные колебания системы с одной степенью свободы без учёта сил сопротивления внешней среды:

$$y(t) + m \delta_{11} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (9.4)$$

Для приведения этого уравнения к стандартному виду разделим все слагаемые в (9.4) на произведение  $m \delta_{11}$ .

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{m \delta_{11}} \cdot y = 0 \quad (9.5)$$

Обозначим в (9.5)  $\omega^2 = \frac{1}{m \delta_{11}}$ . Тогда дифференциальное уравнение (9.5) принимает стандартный вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (9.6)$$

Получили уравнение, описывающее собственные колебания системы с одной степенью свободы. Параметр  $\omega$  – собственная частота колебаний.

В математике получено решение уравнения (9.6), которое имеет следующий вид:

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \quad (9.7)$$

где  $A_1, A_2$  – постоянные интегрирования.

Для определения  $A_1, A_2$  используем начальные условия, имеющие место в момент времени  $t=0$ . При  $t=0$  начальный прогиб  $y = y_0$ , начальная скорость  $v = v_0$ . Подставим в (9.7)  $t=0$ .

$$y = A_1 \cdot \sin 0 + A_2 \cdot \cos 0 = y_0. \quad (9.8)$$

Из (9.8) находим, что  $A_2 = y_0$ . Для определения постоянного интегрирования  $A_1$  необходимо взять первую производную по времени от выражения (9.7), т.е. найти выражение, по которому в процессе колебания изменяется скорость перемещения колеблющейся массы.

$$\frac{dy}{dt} = v = \omega A_1 \cos \omega t - \omega A_2 \sin \omega t \quad (9.9)$$

Подставляя в (9.9)  $t=0$ , получим

$$v = \omega A_1 \cos 0 - \omega A_2 \sin 0 = v_0. \quad (9.10)$$

Из (9.10) найдём, что  $A_1 = \frac{v_0}{\omega}$ . С учётом найденных значений постоянных интегрирования решение дифференциального уравнения (9.7) принимает окончательный вид

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \quad (9.11)$$

Получили закон перемещения массы. Предположим, что колеблющаяся масса  $m$  находится в покое и мы её вывели из равновесия, придав ей начальную

скорость  $v_0$ . Тогда  $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ . Если в начальный момент времени балка уже была изогнута (см. рис. 9.4) и она стала совершать колебания, то начальная скорость колебаний при этом  $v_0 = 0$ . Тогда уравнение колебаний примет вид  $y = y_0 \cos \omega t$ . Оба эти закона одинаковы по своему характеру, только

смещены по фазе. Для анализа колебаний примем закон  $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$  и построим его график (рис. 9.5) согласно данным, приведённым в табл. 9.1.

Таблица 9.1

t	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\omega t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

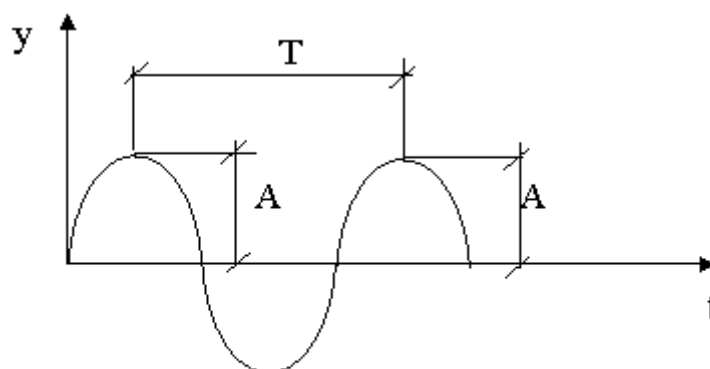


Рис. 9.5

Из анализа графика (см. рис. 9.5) очевидно, что все циклы колебаний одинаковые. Наибольшее отклонение массы от положения статического равновесия равно постоянной величине, которая носит название амплитуды



колебаний  $A = \frac{v_0}{\omega}$ . Удвоенная величина амплитуды колебаний составляет размах колеблющейся точки. Время  $T$ , за которое балка совершает полный цикл колебаний, называется периодом колебаний. Из анализа графика (см. рис. 9.5)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

можно записать, что  $\omega$ . Число полных циклов колебаний в единицу времени называется частотой колебаний; если взять за единицу времени  $2\pi$  с, то

частота собственных (свободных) колебаний  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  с-1. Учитывая,

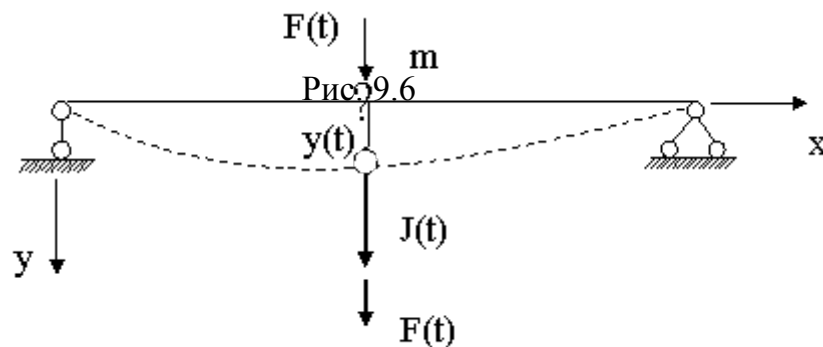
$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$$

что  $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$ , частота собственных колебаний может быть определена из выражения

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} \quad (9.12)$$

#### Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим балку (рис. 9.6) с массой  $m$ . К массе приложена  $F(t)$  – возмущающая сила, создающая вынужденные колебания и изменяющаяся по гармоническому закону  $F(t) = F_0 \cos \theta t$ . Частота возмущающей силы обозначена символом  $\theta$ , а амплитудное значение возмущающей силы –  $F_0$ .



Рассмотрим положение массы  $m$  в момент времени  $t$ . Отклонение массы обозначим  $y(t)$ . В отклонённом положении на массу действуют силы:  $F(t)$  – возмущающая сила;  $J(t)$  – сила инерции.  $\theta$  – частота возмущающей силы;  $F_0$  – амплитуда силы  $F(t)$ .

Силами сопротивления, которые возникают при колебаниях, пренебрегаем. Перемещение массы в любой момент времени через единичное перемещение определяем по выражению

$$y(t) = [F(t) + J(t)] \delta_{11} \quad (9.13)$$

Подставим в (9.13) вместо инерционной силы  $J(t)$  выражение, представленное формулой (9.1)

$$y(t) = \left[ F(t) - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \delta_{11} \quad (9.14)$$

После раскрытия скобок в уравнении (9.14) и деления всех слагаемых на произведение массы и единичного перемещения получаем

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{1}{m \delta_{11}} y(t) = \frac{1}{m} F(t) \quad (9.15)$$

Обозначим в (9.15)  $\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}}$  – собственная частота колебаний. Уравнение (9.15) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m} F_0 \cos \theta \quad (9.16)$$

Как известно, полное решение дифференциального уравнения (9.16)

представляют в виде  $y = y_0 + y_2$ . Общее  $y_0$  решение представляет собой решение однородного дифференциального уравнения. Частное  $y_2$  решение

уравнения (9.16) ищем в виде  $y_2 = C \cos \theta$ ;  $\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -C \theta^2 \cos \theta$ . С учётом изложенного уравнение (9.16) примет следующий вид:

$$-C \theta^2 \cos \theta + \omega^2 C \cdot \cos \theta = \frac{1}{m} F_0 \cos \theta. \quad (9.17)$$

Из уравнения (9.17) следует, что постоянная интегрирования  $C$  может быть найдена из выражения

$$C = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} \quad (9.18)$$

С учетом  $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$  постоянная интегрирования  $C$  получается равной

$$C = \frac{F_0 \delta_{11}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{y_{ст}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \quad (9.19)$$

В (9.19) уст =  $F_0\delta_{11}$ . Замечаем, что амплитуда вынужденных колебаний от силы, изменяющейся по гармоническому закону, больше, чем прогиб от силы,

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$$

приложенной статически. Обозначим  $\mu$  – динамический коэффициент. График изменения динамического коэффициента  $\mu$  в зависимости

от отношения  $\frac{\theta}{\omega}$  показан на рис. 9.7.

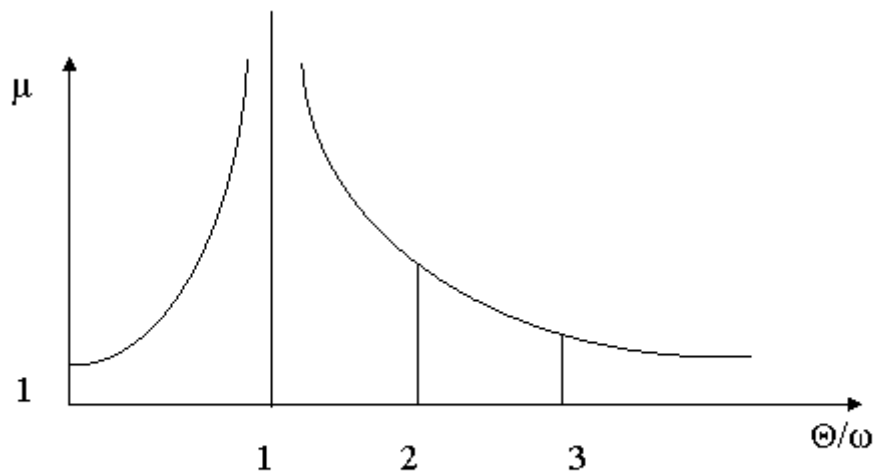


Рис. 9.7

При  $\frac{\theta}{\omega} = 1$  коэффициент  $\mu$  равен  $\infty$ , что означает бесконечно большие прогибы в конструкции, а это равносильно ее разрушению. Явление, при котором частота собственных колебаний  $\omega$  совпадает с частотой возмущающей силы  $\theta$ ,

называется резонансом. Резонанс опасен для конструкций, поэтому надо стремиться к тому, чтобы частоты  $\omega$  и  $\theta$  не совпадали.

Полное решение дифференциального уравнения (9.16) для вынужденных колебаний имеет вид

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \mu y_{cm} \cdot \cos \theta t \quad (9.20)$$

Анализируя выражение (9.20), отмечаем, что первые два слагаемые описывают собственные колебания и быстро затухают. Третье слагаемое описывает вынужденные колебания, которые остаются и имеют ту же частоту, что и возмущающая сила  $F(t)$ .

#### Собственные колебания системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим балку (рис. 9.8) с  $n$  сосредоточенными массами, которые совершают собственные колебания в вертикальной плоскости. Вращения, горизонтальные смещения масс и силы сопротивления внешней среды при анализе колебательного процесса не учитываются.

Число степеней свободы такой системы равно  $n$ . К каждой из масс приложены силы инерции  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . В этом случае имеют место собственные колебания системы с  $n$  степенями свободы.

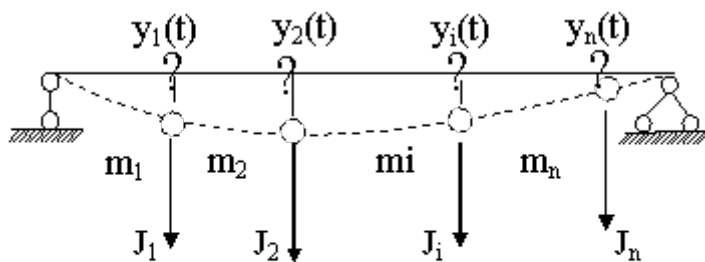


Рис. 9.8

Обозначим отклонение масс  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , а амплитуды колебаний –  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Уравнения движения масс примем в виде, описанном выражениями

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\omega t + \nu); \\ y_2 &= A_2 \sin(\omega t + \nu); \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= A_n \sin(\omega t + \nu). \end{aligned} \quad (9.21)$$

В соответствии с принятым законом колебаний (9.21) определим силы инерции:

$$\begin{aligned} J_1 &= -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \nu) = m_1 \omega^2 y_1; \\ J_2 &= -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = m_2 \omega^2 A_2 \sin(\omega t + \nu) = m_2 \omega^2 y_2; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$J_n = -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = m_n \omega^2 A_n \sin(\omega t + \nu) = m_n \omega^2 y_n.$$

Найдем перемещения точек прикрепления каждой из масс от всех инерционных сил:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} m_1 \omega^2 y_1 + \delta_{12} m_2 \omega^2 y_2 + \dots + \delta_{1n} m_n \omega^2 y_n; \\ y_2 &= \delta_{21} m_1 \omega^2 y_1 + \delta_{22} m_2 \omega^2 y_2 + \dots + \delta_{2n} m_n \omega^2 y_n; \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \delta_{n1} m_1 \omega^2 y_1 + \delta_{n2} m_2 \omega^2 y_2 + \dots + \delta_{nn} m_n \omega^2 y_n. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Разделим в (9.23) все слагаемые на  $\omega^2$  и, обозначая  $\frac{1}{\omega^2} = \lambda$  (собственное число), перенося все слагаемые в одну сторону, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются перемещения у точек прикрепления масс.

$$\begin{cases} (m_1 \delta_{11} - \lambda) y_1 + \dots + m_1 \delta_{1i} y_i + \dots + m_n \delta_{1n} y_n = 0; \\ \dots\dots\dots \\ m_1 \delta_{i1} y_1 + \dots + (m_i \delta_{ii} - \lambda) y_i + \dots + m_n \delta_{in} y_n = 0; \\ \dots\dots\dots \\ m_1 \delta_{n1} y_1 + \dots + m_i \delta_{ni} y_i + \dots + (m_n \delta_{nn} - \lambda) y_n = 0. \end{cases} \quad (9.24)$$

Система уравнений (9.24) имеет два решения. Первое: когда неизвестные (в данном случае  $y$ ) равны 0. Такое решение не соответствует физике этой задачи, т.к. оно обозначает, что рассматриваемая балка находится в состоянии покоя. Второе: отличное от нуля, когда  $y_1 \neq 0$ ;  $y_2 \neq 0$ ;  $y_n \neq 0$  и т.д. Но это решение возможно лишь в том случае, если ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, будет равен нулю.

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, представляет собой уравнение, которое называется характеристическим или вековым. Для определения корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  этого уравнения каждому значению  $\lambda_i$

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

соответствует собственная частота колебаний. Число частот равно числу степеней свободы рассматриваемой системы. Покажем первые три формы колебаний для рассмотренной ранее балки (рис. 9.9).

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} - \lambda & \dots & m_i \delta_{1i} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{i1} & \dots & m_i \delta_{ii} - \lambda & \dots & m_n \delta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & \dots & m_i \delta_{ni} & \dots & m_n \delta_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ – вековое уравнение. (9.25)}$$

Свободные колебания систем могут происходить как по одной из форм колебаний, так и по совокупности нескольких форм. В рассмотренном решении не учтены силы сопротивления, что является приближенным решением. Для практических задач результаты приведенного расчета систем на собственные колебания являются приемлемыми с достаточной степенью точности. Каждой частоте  $\omega_i$  соответствует своя форма колебаний.

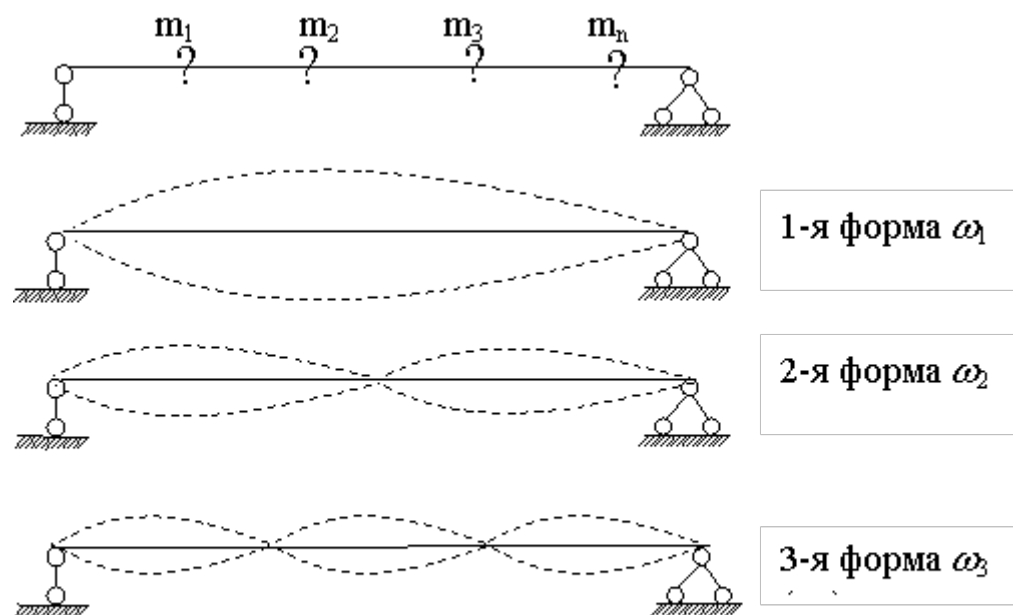


Рис. 9.9

#### Вынужденные колебания систем с $n$ степенями свободы

Рассмотрим систему (рис. 9.10) с  $n$  массами, на которую действует внешняя сила  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , изменяющаяся по гармоническому закону  $\cos \omega t$ .

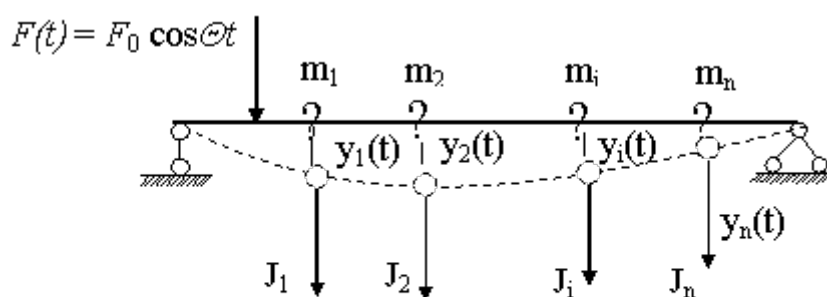


Рис. 9.10

Перемещения масс определяем в соответствии с принципами суперпозиции и Даламбера, используя при этом единичные перемещения  $\delta$ .

$$y_1 = \delta_{11} J_1 + \delta_{12} J_2 + \delta_{13} J_3 + \dots + \delta_{1n} J_n + F(t) \delta_{1F};$$

$$y_2 = \delta_{21} J_1 + \delta_{22} J_2 + \delta_{23} J_3 + \dots + \delta_{2n} J_n + F(t) \delta_{2F};$$

$$\dots\dots\dots (9.26)$$

$$y_n = \delta_{n1} J_1 + \delta_{n2} J_2 + \delta_{n3} J_3 + \dots + \delta_{nn} J_n + F(t) \delta_{nF}.$$

В (9.26)  $J_1, J_2, \dots, J_n$  – инерционные силы;  $\delta_{ij}$  – перемещение в направлении  $i$ -й массы от действия силы  $F = 1$ , приложенной в точке прикрепления  $j$ -й массы;  $\delta_{iF}$  – перемещение  $i$ -й массы от действия силы  $F(t) = 1$ . Движение масс во времени будет происходить по тому же закону, по которому меняется внешняя возмущающая сила:  $y_1 = A_1 \cos \theta t$ ;  $y_2 = A_2 \cos \theta t$ ;  $\dots$ ;  $y_n = A_n \cos \theta t$ .

Силы инерции, приложенные к каждой из масс, имеют вид

$$J_1 = -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 \theta^2 A_1 \cos \theta t = m_1 \theta^2 y_1;$$

$$J_2 = -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = m_2 \theta^2 A_2 \cos \theta t = m_2 \theta^2 y_2;$$

$$\dots\dots\dots (9.27)$$

$$J_n = -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = m_n \theta^2 A_n \cos \theta t = m_n \theta^2 y_n.$$

Подставляем (9.27) в систему (9.26) и, сокращая на  $\cos \theta t$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \dots + \delta_{1n} J_n + F_0 \delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \dots + \delta_{2n} J_n + F_0 \delta_{2F} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n1} J_1 + \delta_{n2} J_2 + \dots + \delta_{nn}^* J_n + F_0 \delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (9.28)$$

В уравнениях (9.28) главные диагональные коэффициенты равны:

$$\delta_{11}^* = \left( \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right); \quad \delta_{22}^* = \left( \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right); \quad \dots; \quad \delta_{nn}^* = \left( \delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right).$$

Следует отметить, что эти коэффициенты в отличие от главных диагональных систем канонических уравнений метода сил и метода перемещений могут быть отрицательными. Решая систему (9.28), находим амплитудные значения инерционных сил  $J_1, \dots, J_n$ . Силы инерции будут меняться по такому же



гармоническому закону, как и возмущающая сила  $F(t)$ :  $J_1(t) = J_1 \cos \theta$   
 $J_2(t) = J_2 \cos \theta$ , ...,  $J_n(t) = J_n \cos \theta$ .

Определив инерционные силы, можно определить изгибающие моменты (динамические), которые возникают в поперечных сечениях рассматриваемой конструкции в состоянии наибольших отклонений масс от положения равновесия. В соответствии с этим можно записать

$$M_{\text{дин}} = M_{F_i} + \sum \bar{M}_i \cdot J_i \quad (9.29)$$

где  $M_{F_i}$  – изгибающий момент от действия амплитудного  $F_0$  значения возмущающей силы  $F(t)$ ;  $\bar{M}_i$  – изгибающий момент от действия силы  $F=1$ , приложенной к точке прикрепления  $i$ -й массы.

Определив  $M_{\text{дин}}$ , можно найти  $Q_{\text{дин}}$ , используя для этого известную из

сопротивления материалов дифференциальную зависимость  $Q_{\text{дин}} = \frac{dM_{\text{дин}}}{dS} = \text{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона  $M_{\text{дин}}$  с осью балки (рамы).

Вырезая узлы на эпюре  $Q_{\text{дин}}$ , определяем  $N_{\text{дин}}$ .

асчет рамы на динамическое действие нагрузки

Рассмотрим статически определимую раму (рис. 9.11), на горизонтальном элементе которой находятся колеблющиеся массы.

Исходные данные:  $\ell = 6$  м;  $h = 4$  м;  $m_1 = 4 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$ ;  $m_2 = 3 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$ ;  $F_0 = 30$  кН;  
 $EJ = 7000$  кН · м<sup>2</sup>.

Порядок расчёта:

1. Определение числа степеней свободы: каждая из масс  $m_1$  и  $m_2$  может перемещаться только в вертикальном направлении, следовательно, число степеней свободы рассчитываемой рамы равно 2.
2. Построение единичных и грузовой эпюр.

В точке приложения массы  $m_1$  прикладываем  $F = 1$  и строим эпюру  $\bar{M}_1$ , изображённую на рис. 9.12.

В точке приложения массы  $m_2$  прикладываем  $F = 1$  и строим эпюру  $\bar{M}_2$ , изображённую на рис. 9.13.

В точке действия возмущающей силы прикладываем амплитудное значение этой силы  $F_0$  и строим эпюру  $M_F$ , изображённую на рис. 9.14.

Определение коэффициентов  $\delta_{iK}$ ,  $\Delta_{iF}$ :

$$\delta_{12} = \sum \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 3 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{128,5}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{\partial n \cdot \bar{M}_2 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{75}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 +$$

$$+ \frac{3}{6EJ} (2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 6) = \frac{246}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\partial n \cdot M_F \cdot \partial n \cdot \bar{M}_1}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 30 \cdot 3 + 30 \cdot 6) = -\frac{240}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \frac{\partial n \cdot M_F \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 -$$

$$- \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 30 \cdot 1,5 + 30 \cdot 3) = -\frac{120}{EJ}.$$

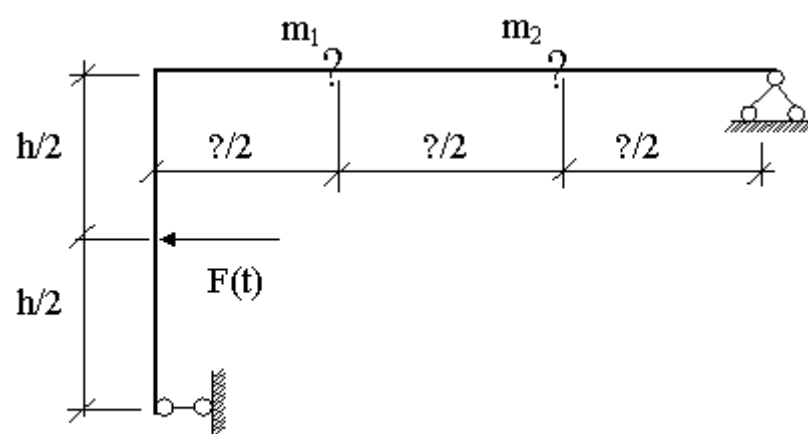


Рис. 9.11

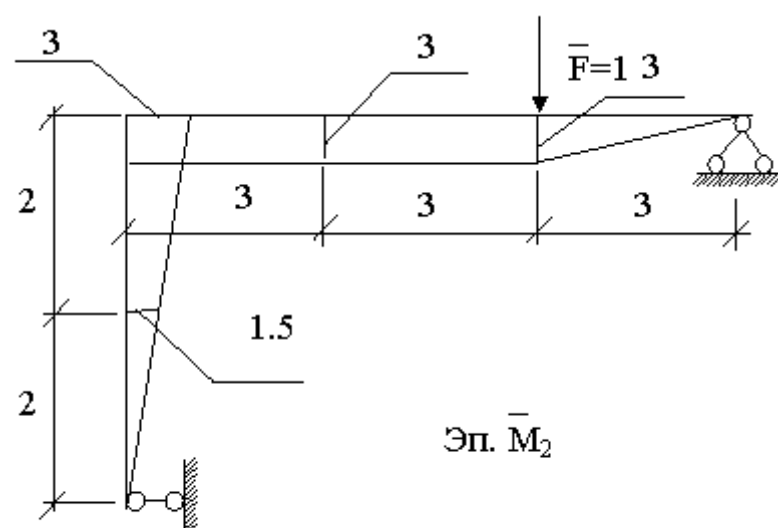
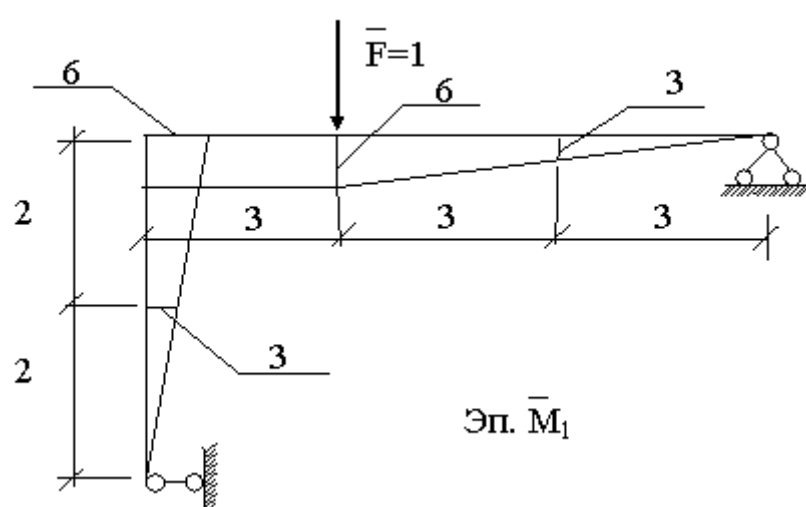


Рис. 9.13

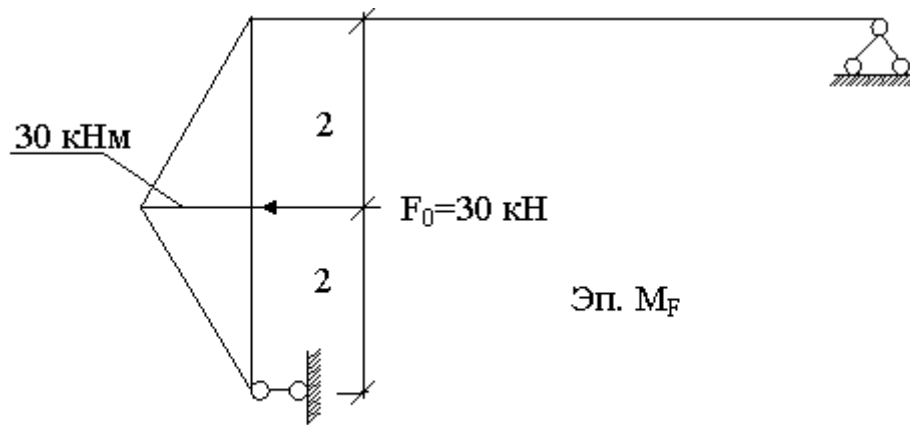


Рис. 9.14

### 3. Определение собственных частот.

Составляем вековое уравнение для определения собственных чисел, которое для данной задачи имеет вид определителя второго порядка (число степеней свободы равно 2).

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \lambda & \delta_{12}m_2 \\ m_1\delta_{21} & \delta_{22}m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем определитель и получим алгебраическое уравнение второго порядка относительно искомого параметра  $\lambda$ .

$$(\delta_{11}m_1 - \lambda)(\delta_{22}m_2 - \lambda) - \delta_{12}^2m_1m_2 = 0;$$

$$\delta_{11}\delta_{22}m_1m_2 - \lambda\delta_{22}m_2 - \lambda\delta_{11}m_1 + \lambda^2 - \delta_{12}^2m_1m_2 = 0;$$

$$\lambda^2 - (\delta_{22}m_2 + \delta_{11}m_1)\lambda + \delta_{11}\delta_{22}m_1m_2 - \delta_{12}^2m_1m_2 = 0.$$

Подставим в последнее уравнение значения перемещений  $\delta$  и решим его:

$$\lambda^2 - \left( \frac{75}{EJ} \cdot 3 + \frac{246}{EJ} \cdot 4 \right) \lambda + \frac{75}{EJ} \cdot \frac{246}{EJ} \cdot 4 - \frac{128,5^2}{(EJ)^2} = 0;$$

$$\lambda^2 - \frac{1209}{EY} \lambda + \frac{204887,75}{(EY)^2} = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1209 \pm \sqrt{642130}}{EJ \cdot 2} = \frac{1209 \pm 801,33}{2EJ}$$

Корнями уравнения являются найденные значения  $\lambda$ .

$$\lambda_1 = \frac{1005,16}{EY}; \quad \lambda_2 = \frac{407,67}{EY}.$$

По найденным значениям  $\lambda$  найдём искомые частоты собственных колебаний.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EJ}{1005,16}} = \frac{\sqrt{EJ}}{31,7} = 0,0315 \text{ с}^{-1} \cdot \sqrt{EJ};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EJ}{407,67}} = \frac{\sqrt{EJ}}{20,19} = 0,0495 \text{ с}^{-1} \cdot \sqrt{EJ}.$$

Определение инерционных сил.

Частоту  $\theta$  возмущающей силы примем равной  $0,3\omega_{\min}$ . Тогда частота вынужденных колебаний  $\theta = 0,3\omega_1 = 0,00945 \sqrt{EJ}$ .

Составим систему уравнений для определения инерционных сил  $J_1$  и  $J_2$ , которая в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \delta_{11}^* \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1F_i} = 0; \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \delta_{22}^* \cdot J_2 + \Delta_{2F_i} = 0. \end{cases}$$

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \Theta^2} = \frac{246}{EJ} - \frac{1}{4 \cdot EJ(0,00945)^2} = -\frac{2583,33}{EJ}.$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \Theta^2} = \frac{75}{EJ} - \frac{1}{3 \cdot EJ(0,00945)^2} = -\frac{3697,44}{EJ}.$$

После подстановки найденных параметров в систему уравнений инерционных сил находим их значения.

$$\begin{cases} -\frac{397,44}{EJ} J_1 + \frac{128,5}{EJ} J_2 - \frac{240}{EJ} = 0; \\ \frac{128,5}{EJ} J_1 - \frac{3697,44}{EJ} J_2 - \frac{120}{EJ} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3697J_1 + 128,5J_2 - 240 = 0; \\ 128,5J_1 - 3697,44J_2 - 120. \end{cases}$$

$$J_1 = -0,074 \text{ кН}; J_2 = -0,035 \text{ кН}.$$

Построение динамических эпюр внутренних усилий  $M_{\text{дин}}$ ,  $Q_{\text{дин}}$ ,  $N_{\text{дин}}$ .

Динамическую эпюру  $M_{\text{дин}}$  построим в соответствии с выражением

$$\text{Эп. } M_{\text{дин}} = \text{Эп. } \bar{M}_1 \cdot J_1 + \text{Эп. } \bar{M}_2 \cdot J_2 + \text{Эп. } M_{F_t}.$$

На рис. 9.15 и 9.16 приведены результаты произведения единичных эпюр на соответствующие им инерционные силы, а на рис. 9.17 показана итоговая эпюра  $M_{\text{дин}}$ .

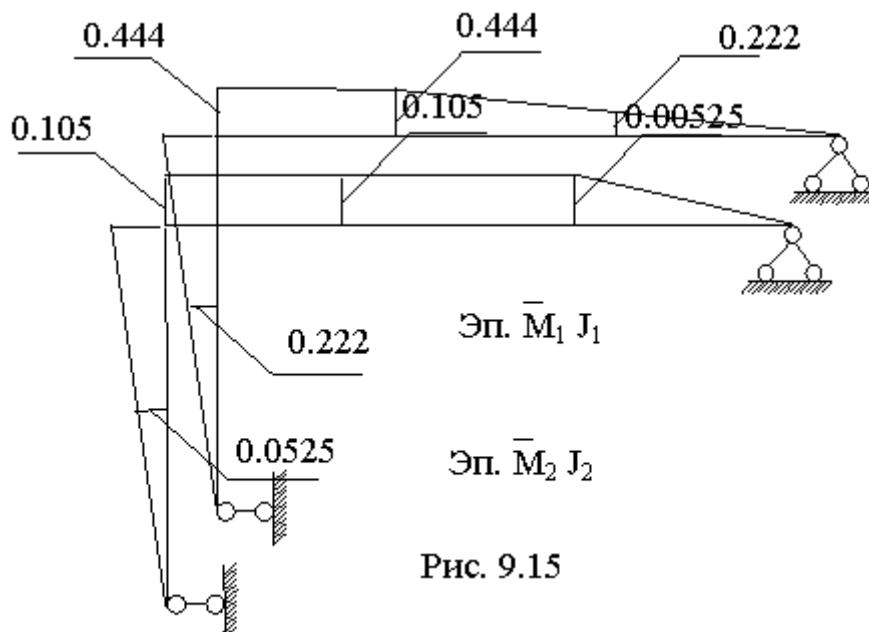


Рис. 9.15

Рис. 9.16

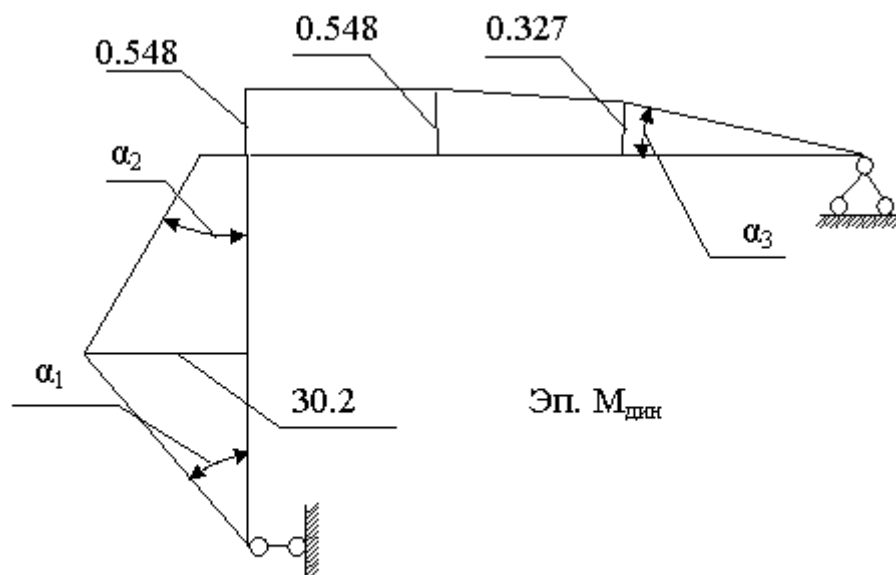


Рис. 9.17

По полученным значениям  $M_{дин}$  строим эпюру  $Q_{дин}$ .

$$Q_{дин} = \frac{dM_{дин}}{ds} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$Q_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -15,137 \text{ кН}; Q_3 = \operatorname{tg} \alpha_3 = 0,074 \text{ кН};$$

$$Q_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 14,862 \text{ кН}; Q_4 = \operatorname{tg} \alpha_4 = 0,109 \text{ кН}.$$

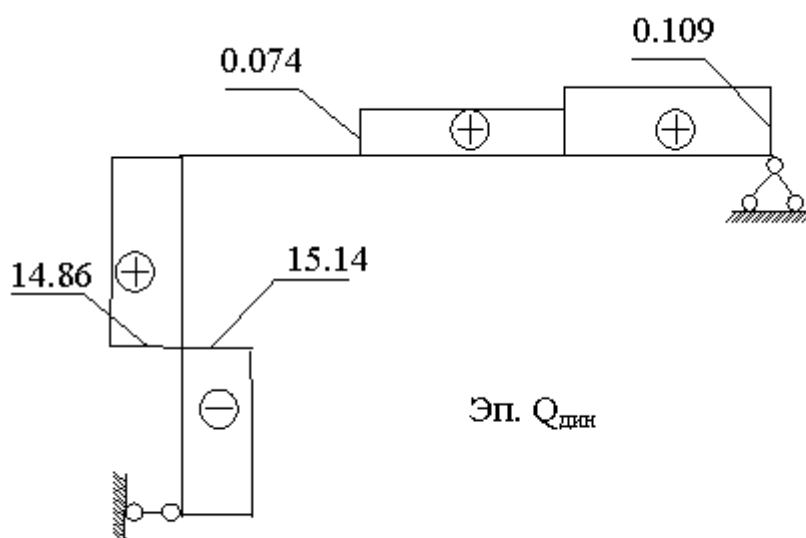


Рис. 9.18

По построенной эпюре  $Q_{\text{дин}}$ , показанной на рис. 9.18, используя метод вырезания узлов на эп.  $Q_{\text{дин}}$ , строим эпюру  $N_{\text{дин}}$  (рис. 9.20).

Вырезаем узел С так, как это показано на рис. 9.19.

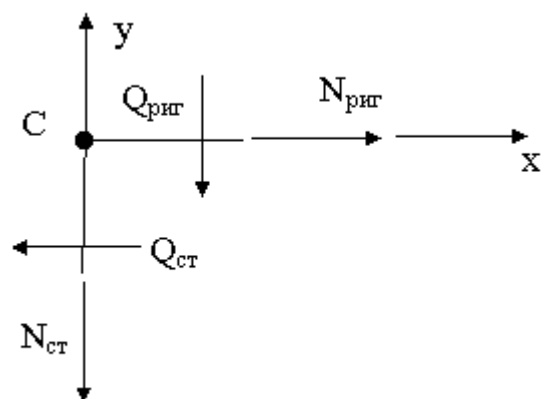


Рис. 9.19

Из суммы проекций на оси  $x$  и  $y$  находим

$$N_{\text{риг}} = -14,86 \text{ кН.}$$

$$N_{\text{ст}} = 0.$$



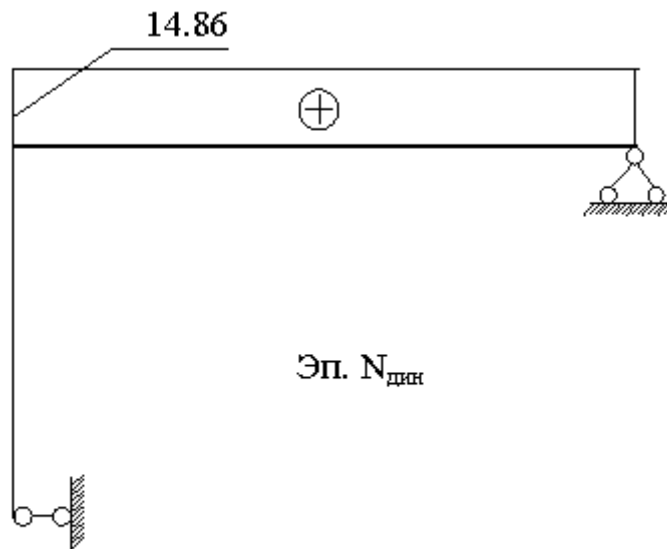


Рис. 9.20

По этим данным строим эпюру  $N_{\text{дин}}$ , показанную на рис. 9.20.

Статическая проверка правильности построения эпюр.

Составим уравнения равновесия, спроецировав все силы, действующие на рассчитываемую раму, на оси  $x$  и  $y$  соответственно, и уравнение моментов.

$$\Sigma x = 15,137 + 14,862 - 30 = 0;$$

$$\Sigma y = 0,109 - 0,074 - 0,035 = 0;$$

$$\Sigma m_A = -30 \cdot 2 + 0,074 \cdot 3 + 0,035 \cdot 6 - 0,109 \cdot 9 + 14,862 \cdot 4 = 0.$$

Равенство нулю последнего выражения означает, что статическая проверка выполняется.

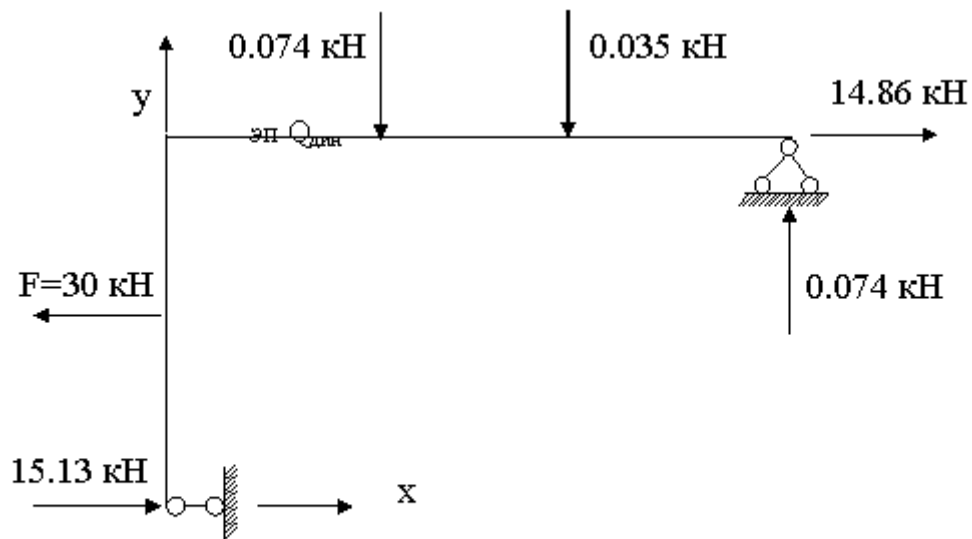


Рис. 9.21

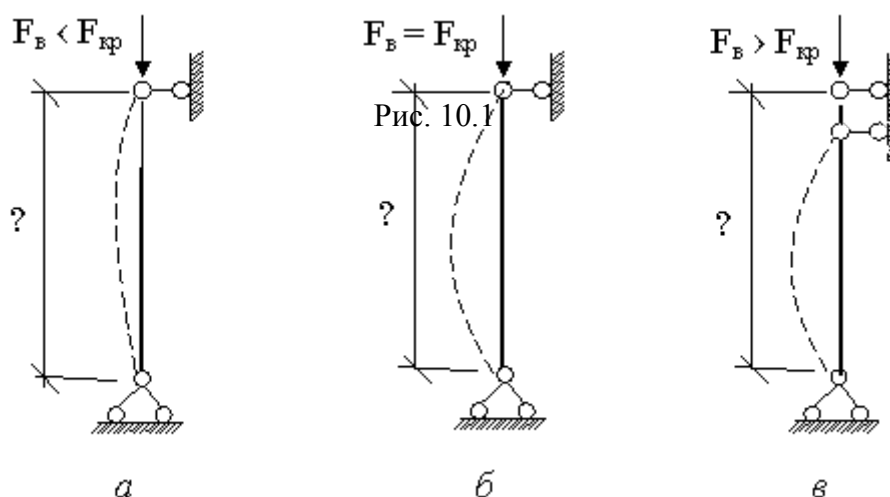
## Устойчивость стержневых систем

### Основные понятия

Под устойчивостью понимают способность элементов конструкций сохранять первоначальное положение равновесия при действии на них сжимающих нагрузок. Устойчивость является необходимым условием для каждой инженерной конструкции. Когда первоначальная форма равновесия становится неустойчивой, происходит потеря устойчивости конструкции. Потеря устойчивости может привести к разрушению как отдельного элемента, так и конструкции в целом.

Физическим признаком устойчивости формы равновесия служит поведение нагруженной конструкции при её отклонении от положения равновесия на некоторую малую величину. Равновесие конструкции устойчиво, если после устранения причин, вызвавших её отклонение, она возвращается в исходное положение. Если после устранения причин конструкция не возвращается в первоначальное положение, то её первоначальное положение равновесия неустойчиво. Наименьшая сжимающая нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости конструкции, называется критической силой  $F_{кр}$ .

Основы устойчивости упругих систем были разработаны Л. Эйлером (1744 г.). Им впервые решена задача об устойчивости стержня, сжатого силой  $F$  (рис. 10.1).



Для сжатого силой  $F$  стержня при  $F < F_{кр}$  устойчива прямолинейная первоначальная форма равновесия (рис. 10.1, а). Это состояние характеризуется тем, что стержень, отклонённый на малую величину от начального положения равновесия, возвращается в первоначальное положение после устранения возмущений.

При сжимающей силе  $F = F_{кр}$  (рис. 10, б) происходят разветвления форм равновесия, т. е. возможны две формы равновесия – прямолинейная и криволинейная. В этом случае стержень испытывает состояние, когда бесконечно малое превышение силы  $F$  приводит к потере устойчивости. При  $F > F_{кр}$  (рис. 10, в) устойчивыми становятся криволинейные формы равновесия, что ведёт к разрушению стержня.

На рис. 10.1 пунктиром показаны неустойчивые формы равновесия. Основной задачей исследования устойчивости конструкций является определение критических нагрузок. Критические нагрузки определяются статическими, энергетическими и динамическими методами.

**Статический метод.** Исследуют равновесие систем в отклонённом состоянии. Получают уравнения, описывающие перемещения систем в отклонённом положении, и определяют величину сжимающей силы, при которой возможно появление новых форм равновесия. Минимальная величина этой нагрузки и будет являться критической силой. Для исследований используют любые методы раскрытия статической неопределённости.

**Энергетический метод.** Этот метод основан на определении критической нагрузки из условия равенства нулю приращения полной энергии системы при переходе её в новое неустойчивое положение равновесия. Если потенциальная энергия системы при этом возрастает, то первоначальное положение равновесия устойчиво.

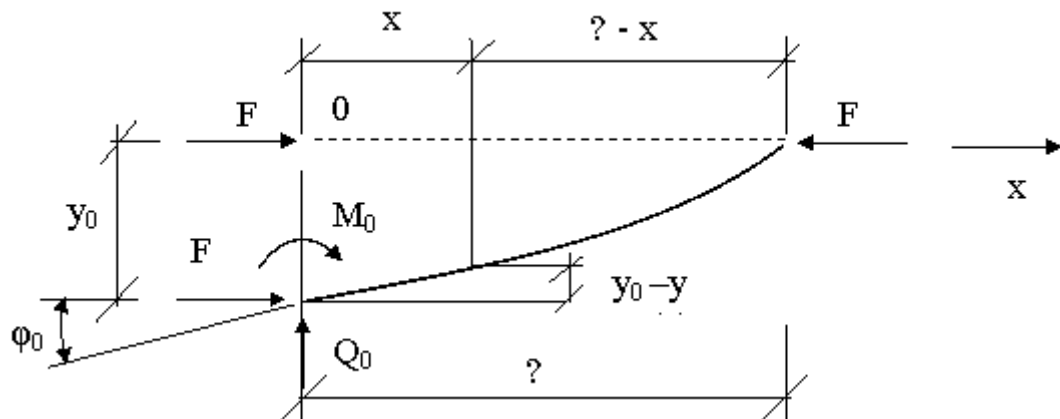
Динамический метод. Этот метод основан на использовании колебаний систем. Если колебания системы происходят с уменьшением амплитуды колебаний, то первоначальное положение системы устойчивое. При достижении нагрузки критического значения внешнее возбуждение приводит к неограниченному росту амплитуд колебаний.

#### Определение усилий в сжато-изогнутых стержнях при смещении их опорных закреплений

При исследовании устойчивости стержневых систем необходимо определить концевые усилия в стержнях при смещениях их опорных закреплений.

Рассмотрим стержень длиной  $\ell$ , жёсткостью  $EJ_z$ , сжатый силой  $F$  (рис. 10.2).

Предположим, что в результате потери устойчивости стержня, сжатого силой  $F$ , левый край его сместился на величину  $y_0$ , а поперечное сечение повернулось на угол  $\varphi_0$ . В переместившемся приопорном сечении стержня возникли усилия  $M_0$  (изгибающий момент) и  $Q_0$  (поперечная сила). Направления  $Q_0$  и  $M_0$  выбираем в соответствии с принятыми направлениями для поперечной силы и изгибающего момента.



В произвольном сечении  $x$  стержня значение изгибающего момента определяется выражением

$$M(x) = M_0 + Q_0 \cdot x - F(y - y_0). \quad (10.1)$$

Из теории изгиба, рассмотренного в курсе сопротивления материалов, уравнение изогнутой оси стержня записывается

$$EJ_z \cdot y''(x) = -M(x). \quad (10.2)$$

Из равенства выражений (10.1) и (10.2) получаем

$$y''(x) = -\frac{M_0 + Q_0 x - F(y_0 - y)}{EJ_z} \quad (10.3)$$

Обозначим в (10.3)  $\frac{F}{EJ_z} = k^2$ . Тогда уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$y''(x) + k^2 y(x) = -\frac{(M_0 + Q_0 x - Fy_0)}{EJ_z} \quad (10.4)$$

Решением неоднородного дифференциального уравнения (10.4) второго порядка является функция

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{(M_0 + Q_0 x - Fy_0)}{k^2 EJ_z} \quad (10.5)$$

Функция (10.5) представляет собой уравнение изогнутой оси сжатого стержня. Согласно известной дифференциальной зависимости, получим выражение для угла поворота:

$$\varphi(x) = y'(x) = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx - \frac{Q_0}{k^2 EJ_z} \quad (10.6)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  используем граничные условия: при  $x = 0$   $y = y_0$ , а  $y' = y'_0$ . Подставим эти условия в (10.5) и (10.6),

получаем  $y_0 = C_2 - \frac{M_0 - Fy_0}{k^2 EJ_z}$  и соответственно  $y'_0 = kC_1 - \frac{Q_0}{k^2 EJ_z}$ . Отсюда

постоянные интегрирования  $C_2 = \frac{M_0}{k^2 EJ_z}$  и  $C_1 = \frac{y'_0}{k} + \frac{Q_0}{k^3 EJ_z}$ .

После подстановки найденных значений постоянных интегрирования в (10.5) и (10.6) выражения для  $y(x)$  и  $y'(x)$  принимают вид, соответствующий выражениям (10.7) и (10.8).

$$y(x) = \frac{y_0 + y'_0 \sin kx}{k} - \frac{M_0 (1 - \cos kx)}{k^2 EJ_z} - \frac{Q_0 (kx - \sin kx)}{k^3 EJ_z} \quad (10.7)$$

$$y'(x) = y'_0 \cos kx - \frac{M_0 \sin kx}{kEJ_z} - \frac{Q_0(1 - \cos kx)}{k^2 EJ_z} \quad (10.8)$$

Продифференцировав по длине стержня, получим выражения для определения внутренних силовых факторов.

$$M_z(x) = -EJy''(x) = kEJy'_0 \sin kx + M_0 \cos kx + \frac{Q_0 \sin kx}{k} \quad (10.9)$$

$$Q_y(x) = k^2 EJy'_0 \cos kx - kM_0 \sin kx + Q_0 \cos kx \quad (10.10)$$

#### Определение изгибающих моментов и поперечных сил в опорных сечениях

Полученные выражения можно использовать для определения усилий в приопорных сечениях стержня при единичных смещениях этих сечений. Для стержня (рис. 10.3), закреплённого с обеих сторон, при повороте левой заделки на угол  $y'_0 = 1$  имеют место следующие краевые условия – при  $x = 0$  прогиб  $y = 0$  и угол поворота  $y'_0 = 1$ , а при  $x = \ell$  прогиб опоры В  $y_\ell = 0$  и угол поворота  $y'_\ell = 0$ .

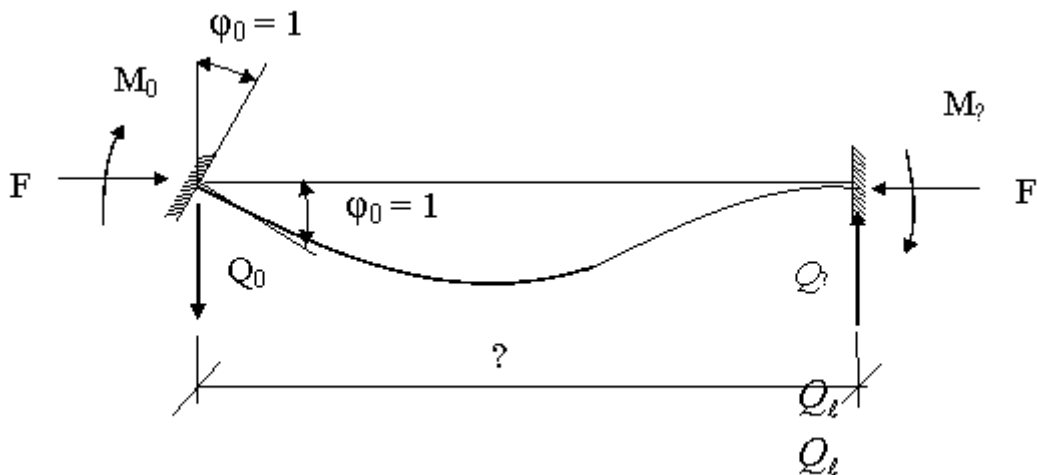


Рис. 10.3

Подставляя эти условия в (10.9) и (10.10), получаем

$$M_0 = \frac{4EJ}{\ell} \frac{kl(\operatorname{tg} kl - kl)}{8\operatorname{tg} kl \left( \operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)} \quad (10.11)$$

$$Q_0 = -\frac{6EJ}{\ell^2} \frac{(k\ell)^2 \operatorname{tg} \frac{k\ell}{2}}{12 \left( \operatorname{tg} \frac{k\ell}{2} - \frac{k\ell}{2} \right)}. \quad (10.12)$$

Используя найденные значения начальных параметров (10.11) и (10.12), находим значение изгибающего момента при  $x = \ell$ .

$$M_\ell = \frac{2EJ}{\ell} \frac{k\ell(k\ell - \sin k\ell)}{4 \sin k\ell \left( \operatorname{tg} \frac{k\ell}{2} - \frac{k\ell}{2} \right)}. \quad (10.13)$$

Изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие в опорных сечениях при других перемещениях опорных закреплений, приведены в прил. 3.

#### Расчёт статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений

Как и любой расчёт, расчёт статически неопределимых систем на устойчивость начинается с принятия ряда допущений, позволяющих с достаточной точностью при выполнении инженерных расчётов определить величину критической силы, при которой происходит потеря устойчивости. Определение потери устойчивости рам выполняют в случаях, когда в стержнях до потери устойчивости возникают только продольные силы. Это возможно, когда рама нагружена только узловой нагрузкой. Если рама загружена силами, приложенными вне узлов, то такая нагрузка заменяется узловой нагрузкой.

В этом случае критические силы определяются приближённо и находятся лишь наибольшие значения продольных сил. Для расчёта рам на устойчивость применяют метод сил и метод перемещений.

Рассмотрим особенности расчёта статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений. Как и при обычном расчёте, сначала определяют по известной формуле  $n = n_y + n_l$  степень кинематической неопределимости. Затем в соответствии с заданной системой выбирают основную систему. Для этого во все жёсткие узлы вводят условные заделки, а в направлении возможных линейных подвижек элементов заданной системы ставят условные простые кинематические связи. Далее записывают систему канонических уравнений, которая имеет вид

[illegible]

перемещений отсутствует грузовая эпюра моментов  $M_F^0$ . Во-вторых, коэффициенты при неизвестных, представляющие собой реактивные усилия в условных связях и заделках от единичных перемещений этих связей и заделок (см. прил. 3), учитывают появление дополнительных моментов на сжатых элементах основной системы.

$$\nu = \ell \sqrt{\frac{F_{\text{кр}}}{EJ}},$$

параметр  $\nu$ , в котором присутствует искомая критическая сила и который содержится в коэффициентах  $g_{ij}$ , то формирование указанного определителя представляет одну из задач данного расчёта. Такой определитель, называемый уравнением устойчивости метода перемещений, представлен выражением

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & \dots & r_{ii} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{ni} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (10.15)$$

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}, \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}, \quad \eta_2(v) = \eta_1 \left( \frac{v}{2} \right).$$



$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}, \quad \varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right), \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}.$$

Полученное алгебраическое уравнение решают методом подбора, задавая значение параметра  $v$ . По заданному начальному значению  $v$  по прил. 4 или по приведённым только что формулам находят значения функций, входящих в решаемое алгебраическое уравнение. Удобно строить график, по оси ординат которого откладывают результат решения этого уравнения, а по оси абсцисс – величину того значения  $v$ , при котором получен этот результат. Искомым является то значение параметра  $v$ , при котором решаемое алгебраическое уравнение оказывается равным нулю. Тогда при найденном значении  $v$  из

выражения  $v = \ell \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ}}$  находят величину критической силы.

Если на рассматриваемую статически неопределимую систему действуют несколько сжимающих сил, необходимо знать величины соотношений между ними. Исходя из таких соотношений находят параметры уравнения устойчивости и проводят его решение точно так же, как и при действии на систему только одной сжимающей силы.